(G)

$\mathrm{Aut}\, S_n = \mathrm{Int}\, S_n$ si $n \neq 6$

Leçons : 101, 104, 105, 108

Réf. : Perrin, Cours d'algèbre p 30

Proposition :

Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}(S_n)$.

Si pour toute transposition $\tau \in S_n$, $\varphi(\tau)$ est également une transposition alors $\varphi \in \mathrm{Int}(S_n)$

Th. :

$\mathrm{Aut}(S_n) = \mathrm{Int}(S_n)$ pour $n \neq 6$.

Proposition

Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}(S_n)$ tq $\forall \tau \in S_n$ transposition, $\varphi(\tau)$ est une transposition.

Méthode : Construire $\alpha \in S_n$ tq $\forall i \geq 2$, $\varphi((1 i)) = \alpha (1 i) \alpha^{-1}$ et conclure grâce au fait que S_n est engendré par les $(1 i)$.

- S_n est engendré par les $\tau_i = (1 i)$ pour $i \geq 2$.

Donc $\forall i \geq 2$, $\varphi(\tau_i)$ est une transposition et $\forall i, j \geq 2$, $i \neq j$, $\varphi(\tau_i)$ et $\varphi(\tau_j)$ ne commutent pas car τ_i et τ_j ne commutent pas et φ est un automorphisme.

$\varphi(\tau_i)$ et $\varphi(\tau_j)$ ne sont donc pas à support disjoint.

- On pose $\varphi(\tau_2) = (\alpha_1 \alpha_2)$ et $\varphi(\tau_3) = (\alpha_1 \alpha_3)$.

Alors pour tout $i > 3$, $\varphi(\tau_i)$ est de la forme (α_1, α_i).

En effet : s'il existe $i > 3$ tq $\alpha_1 \notin \mathrm{Supp}(\varphi(\tau_i))$,

comme $\mathrm{Supp}(\varphi(\tau_i)) \cap \mathrm{Supp}(\varphi(\tau_2)) \neq \emptyset$

$\mathrm{Supp}(\varphi(\tau_i)) \cap \mathrm{Supp}(\varphi(\tau_3)) \neq \emptyset$ on a donc $\varphi(\tau_i) = (\alpha_2 \alpha_3)$

On a, $(\alpha_1\ \alpha_2)(\alpha_1\ \alpha_3)(\alpha_2\ \alpha_3) = (\alpha_1\ \alpha_3)$, donc en composant par φ^{-1} on aurait $(1\,2)(1\,3)(1\,i) = (1\,3)$, absurde (prendre l'image de i par ex.)

$\forall i \geq 2$, $\varphi(\tau_i)$ est de la forme $(\alpha_1\ \alpha_i)$, et $\varphi \in \mathrm{Aut}(S_n)$ donc les α_i sont distincts donc $\{\alpha_1 \dots \alpha_n\} = \{1 \dots n\}$.

Soit $\alpha : \{1 \dots n\} \longrightarrow \{\alpha_1 \dots \alpha_n\}$
$$i \longmapsto \alpha_i.$$

Alors $\alpha \in S_n$
et $\forall\, 2 \leq i \leq n$, $\alpha \tau_i \alpha^{-1} = (\alpha(1)\ \alpha(i)) = (\alpha_1\ \alpha_i) = \varphi(\tau_i)$.

Donc φ coïncide avec l'automorphisme intérieur i_α sur les τ_i qui engendrent S_n, donc $\varphi = i_\alpha$

Th. :

(disjointes)

1/ Etude du centralisateur d'une transposition / d'un produit de transpositions

On note pour $\tau \in S_n$, $c(\tau) = \{s \in S_n \,/\, s\tau s^{-1} = \tau\}$ le centralisateur de τ.

a°/ transposition

Soit $\tau = (a\,b) \in S_n$. On pose $E = \{1 \dots n\}$ et $F = E \setminus \{a, b\}$.

Alors
$$s \in c(\tau) \iff s\tau s^{-1} = \tau \iff (s(a)\ s(b)) = (a\,b) \iff s(\{a,b\}) = \{a,b\} \iff s(F) = F.$$

L'application $\pi : c(\tau) \longrightarrow S(F) \simeq S_{n-2}$ est donc un morphisme surjectif.
$$s \longmapsto s_{|F}$$

De plus, $\mathrm{Ker}\, \pi = \{id, \tau\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b°/ produit de transpositions à support disjoint

Soit $\tau = \underbrace{(a_1\ a_2)}_{\tau_1} \dots \underbrace{(a_{2k-1}\ a_{2k})}_{\tau_k}$ un produit de k transpositions disjointes.

Les τ_i sont à support disjoint, donc commutent, donc commutent avec τ donc pour tout $1 \leq i \leq k$, $\tau_i \in c(\tau)$.

Soit $N = \langle \{\tau_i, 1 \leq i \leq k\} \rangle = \{ \prod_{i=1}^{k} \tau_i^{\alpha_i}, \alpha_i \in \{0,1\}\}$.

Alors : . $|N| = 2^k$ et $\boxed{N \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k}$

. Soit $s \in c(\tau)$ et $1 \leq i \leq k$.

$$s \tau s^{-1} = \underbrace{(s(a_1)\, s(a_2))}_{s\tau_1 s^{-1}} \underbrace{\dots}_{\dots} \underbrace{(s(a_{2k-1})\, s(a_{2k}))}_{s\tau_k s^{-1}} = \tau$$

donc par unicité de la décomposition de τ en cycles disjoints (à l'ordre près)

$\forall\ 1 \leq i \leq k,\ \exists\ 1 \leq j \leq k \ / \ s\tau_i s^{-1} = \tau_j$

donc $\boxed{N \lhd c(\tau)}$

Soit $n \geq 2$ et $\varphi \in \mathrm{Aut}\, S_n$, $\varphi \notin \mathrm{Int}\, S_n$

2) M.q. on peut supposer $n \geq 6$

D'après la proposition, $\exists\ \tau \in S_n$ tq $\varphi(\tau) =$ produit de k transpositions à cycle disjoint (car φ conserve l'ordre), où k est impair (idem), et où $k \geq 3$

On peut donc supposer $n \geq 6$

3) Fin du raisonnement grâce à la connaissance des sous-groupes distingués de S_n

On pose $\varphi(\tau) = \tau'$ (τ = transposition précédente)

On a alors $c(\tau') = c(\varphi(\tau))$ donc $\boxed{c(\tau) \simeq c(\tau')}$

D'après 1) b), $c(\tau)$ admet donc un sous-groupe distingué H,

et $H \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k \geq 3}$

π (du 1/ a°/) étant surjective, $\pi(H) \triangleleft S(F)$ dans S_{n-2}

admet un sous-groupe distingué H' tq :

- si $\tau \in H$, $H' \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k-1 \geq 2}$ (car $\ker \pi = \{id, \tau\}$)
- sinon $H' \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k \geq 3}$

Or on connait les sous-groupes distingués de S_{n-2}

- si $n-2 \neq 4$:

	$\{id\}$	A_n	S_n
cardinal :	2^0	$\frac{(n-2)!}{2}$	$(n-2)!$
	×	$\neq 2^\alpha$ si $n-2 \geq 3$	$\neq 2^\alpha$ si $n-2 \geq 3$

donc la seule possibilité serait $n-2=2$ soit $n=4$, mais on a supposé $n \geq 6$.

- si $n-2=4$:

	$\{id\}$	V_4	A_4	S_4
cardinal :	2^0	4	12	24
	×	✓	×	×

$$V_4 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{3-1}$$

donc si $n-2=4$, soit $n=6$, on pourrait avoir $H' \simeq V_4$.

Par csq, si $n \neq 6$, $\mathrm{Aut}(S_n) = \mathrm{Int}(S_n)$